

## CARGAS MÓVEIS SOBRE PLACAS: UMA FORMULAÇÃO ATRAVÉS DA ANÁLISE MODAL

**Fernando R. da Silva**

**Wallace M. Bessa**

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e Materiais  
Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

***Resumo.** Uma formulação para o estudo da interação entre uma estrutura, representada por uma placa, e um carregamento oriundo de um subsistema dinâmico móvel é apresentada. Utiliza-se a análise modal para a definição dos transformadores que representem esta interação energética entre a placa e o subsistema mecânico. Ressalta-se as facilidades do procedimento generalizado da técnica dos grafos de ligação no tratamento deste problema. A validação do procedimento adotado é obtida através de um exemplo onde um oscilador percorre a superfície de uma placa, sendo apresentados, em seguida, os resultados de simulação que destacam a importância de um modelo que considere o comportamento global do sistema. Discute-se, por fim, a melhoria do modelo ao se unir a técnica dos elementos finitos à dos grafos de ligação, visando uma maior flexibilidade na caracterização da estrutura.*

***Palavras-chave:** Dinâmica, Vibrações, Cargas Móveis, Análise Modal, Grafos de Ligação*

### 1. INTRODUÇÃO

O problema de cargas móveis começou a ser estudado quando se observou que uma estrutura submetida a um carregamento móvel, apresentava uma deflexão maior do que quando submetida a um carregamento estático.

Esta classe de problemas tem sido abordada através de modelos simples, onde o carregamento é constante ou harmônico e a estrutura é, em geral, representada por vigas seguindo a hipótese de Bernoulli.

Por se tratar de um assunto de grande relevância para a engenharia, esforços tem sido realizados com o intuito de se dar um tratamento matemático mais aprimorado, a fim de que outras estruturas, envolvendo carregamentos mais complexos, possam também ser estudadas.

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado eficaz na solução de sistemas que envolvam solicitações dinâmicas, inclusive quando há interação entre subsistemas de natureza distinta (Karnopp et al., 1990). Deste modo, esta técnica torna-se perfeitamente aplicável ao estudo do comportamento de uma estrutura modelada como meio contínuo, quando submetida a um carregamento móvel proveniente de um subsistema modelado a partir de parâmetros concentrados.

Diferentes estruturas podem ser analisadas através do procedimento generalizado e, devido à modularidade possibilitada pela técnica dos grafos de ligação, pode-se, ainda, acoplar subsistemas mecânicos distintos.

O modelo matemático obtido na forma de equações de estado permite uma análise física do sistema global, isto é, uma análise da estrutura de placa, do subsistema mecânico e da interação entre os dois.

## 2. MODELAGEM DO SISTEMA

Utiliza-se a análise modal na construção do modelo da estrutura. Determina-se o número de modos necessários para representá-la, e, para cada modo são definidos os elementos inerciais, capacitivos e resistivos. Estes elementos têm por objetivo representar a inércia, a flexibilidade e o amortecimento modal da estrutura.

Considera-se, como exemplo, uma placa simplesmente apoiada, submetida a ação de um sistema dinâmico que desloca-se com uma determinada velocidade ao longo de uma trajetória plana pré-estabelecida, conforme mostrado na Fig. 1. Neste caso um oscilador, composto por massa, mola e amortecedor, sujeito a uma força genérica, representa o subsistema que interage dinamicamente com a placa.

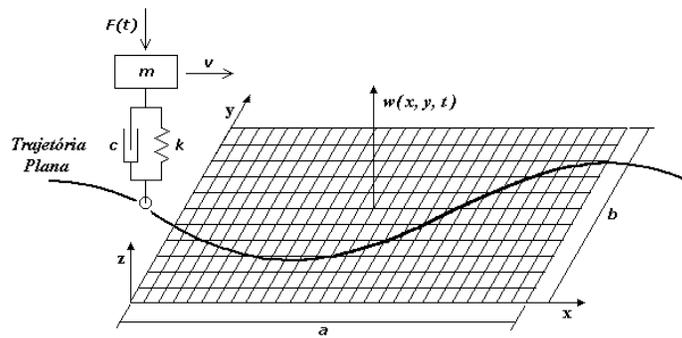


Figura 1 – Modelo físico do sistema

As frequências naturais ( $\omega_{mn}$ ) de algumas estruturas, e seus respectivos modos de vibrar ( $W_{mn}$ ), podem ser encontrados na literatura. Para o caso de uma placa simplesmente apoiada, Meirovitch (1967) mostra que

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D_E}{\rho}} \quad (1)$$

$$W_{mn}(x, y) = \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (2)$$

$$D_E = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

onde  $D_E$  é a rigidez flexional da placa expressa pela Eq. (3).  $E$ ,  $\nu$  e  $\rho$  são, respectivamente, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade de área do material. As dimensões da placa são representadas por  $a$  e  $b$  e pela espessura  $h$ .

Neste trabalho foram utilizados, a título de validação do procedimento, os primeiros quatro modos de vibrar ( $W_{11}$ ,  $W_{12}$ ,  $W_{21}$  e  $W_{22}$ ) para representar os deslocamentos da placa, porém um número maior de modos pode ser facilmente incluído no modelo caso seja necessário. A contribuição de cada um dos quatro no deslocamento total da placa pode ser visualizada na Fig. 2.

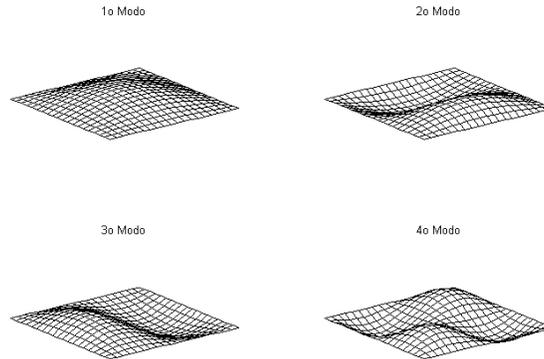


Figura 2 – Modos de vibrar da placa

O grafo de ligação indicado para este exemplo, é apresentado na Fig. 3. A parte correspondente a estrutura baseia-se no modelo proposto por Karnopp *et al.* (1990) para o estudo de uma viga sujeita a flexão, porém, como se trata de um procedimento generalizado, pode-se aplicá-lo a qualquer estrutura. A adaptação para o problema de placas é perfeitamente válida, desde que se substitua o módulo dos transformadores pelos modos de vibração da placa.

Devido a característica modular da técnica dos grafos de ligação pode-se, facilmente, acoplar a estrutura a qualquer subsistema mecânico. Para representar um oscilador, foi construído um grafo no qual estivessem incluídos seus efeitos inerciais, capacitivos e resistivos.

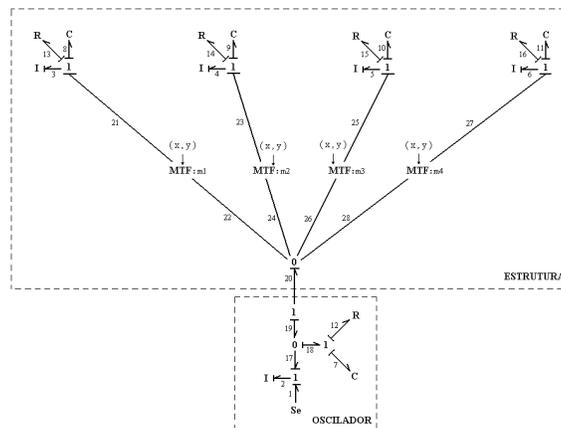


Figura 3 – Grafo de Ligação para uma estrutura que interage com um oscilador

A cada junção 1 do grafo da estrutura estão associados a inércia ( $I_{mn}$ ), a flexibilidade ( $C_{mn}$ ) e o amortecimento ( $R_{mn}$ ) modal. Para a placa, obtém-se:

$$I_{mn} = \frac{1}{4} \rho . a . b \quad (4)$$

$$C_{mn} = \frac{1}{I_{mn} \omega_{mn}^2} \quad (5)$$

$$R_{mn} = 2\xi_{mn} \omega_{mn} I_{mn} \quad (6)$$

onde  $\xi_{mn}$  é o fator de amortecimento modal.

O oscilador também apresenta inércia ( $m$ ), flexibilidade ( $1/k$ ) e amortecimento ( $c$ ). Os transformadores modulados ( $MTF$ ) presentes no grafo representam a contribuição dos modos de vibração da estrutura no ponto de contato com o oscilador. Estes transformadores representam a transição das variáveis físicas para variáveis modais e vice-versa. Como neste trabalho o carregamento é móvel, as coordenadas de posição do oscilador mudam a cada instante, tornando necessária a utilização de transformadores modulados, cujos módulos são apresentados a seguir:

$$m_1 = \text{sen}\left(\frac{\pi . v_1 . t}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi . v_2 . t}{b}\right) \quad (7)$$

$$m_2 = \text{sen}\left(\frac{\pi . v_1 . t}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi . v_2 . t}{b}\right) \quad (8)$$

$$m_3 = \text{sen}\left(\frac{2\pi . v_1 . t}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi . v_2 . t}{b}\right) \quad (9)$$

$$m_4 = \text{sen}\left(\frac{2\pi . v_1 . t}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi . v_2 . t}{b}\right) \quad (10)$$

onde  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades do oscilador nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A junção 0, do grafo correspondente à estrutura, realiza o somatório da contribuição de cada modo de vibrar, para compor a configuração deformada do sistema. Esta junção representa a Eq. (11), que difere da equação utilizada na análise modal clássica, unicamente pelo fato de não estar expressa em função dos deslocamentos, mas sim das velocidades  $\dot{w}(x, y, t)$  e  $\dot{\eta}(t)$ , respectivamente, fluxos real e modal.

$$\dot{w}(x, y, t) = \sum W_{mn}(x, y) \dot{\eta}(t) \quad (11)$$

O modelo de estado associado ao grafo da Fig. 3 pode ser expresso por:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (12)$$

$$Y = CX + DU \quad (13)$$

onde  $X$  é o vetor de variáveis de estado,  $U$  é o vetor de variáveis de entrada,  $Y$  é o vetor de variáveis de saída e  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são matrizes com os coeficientes representativos das propriedades físicas do sistema e dos módulos dos transformadores modulados que, representam as contribuições de cada modo na solução do problema.

Para a análise das interações energéticas entre os dois sistemas, pode-se avaliar o fluxo de potência através da ligação 20, que será calculado por

$$P_{20} = e_{20} f_{20} \quad (14)$$

Logo, após algumas manipulações matemáticas, obtêm-se os seguintes vetores e matrizes para o modelo de estado:

$$X = [p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11}]^T$$

$$U = [e_1]$$

$$Y = [e_{20} \quad f_{20}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & \frac{m_1 c}{I_{11}} & \frac{m_2 c}{I_{12}} & \frac{m_3 c}{I_{21}} & \frac{m_4 c}{I_{22}} & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1 c}{m} & -\frac{(R_{11} + m_1^2 c)}{I_{11}} & -\frac{m_1 m_2 c}{I_{12}} & -\frac{m_1 m_3 c}{I_{21}} & -\frac{m_1 m_4 c}{I_{22}} & 0 & -\frac{1}{C_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_2 c}{m} & -\frac{m_1 m_2 c}{I_{11}} & -\frac{(R_{12} + m_2^2 c)}{I_{12}} & -\frac{m_2 m_3 c}{I_{21}} & -\frac{m_2 m_4 c}{I_{22}} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{m_3 c}{m} & -\frac{m_1 m_3 c}{I_{11}} & -\frac{m_2 m_3 c}{I_{12}} & -\frac{(R_{21} + m_3^2 c)}{I_{21}} & -\frac{m_3 m_4 c}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{21}} & 0 \\ \frac{m_4 c}{m} & -\frac{m_1 m_4 c}{I_{11}} & -\frac{m_2 m_4 c}{I_{12}} & -\frac{m_3 m_4 c}{I_{21}} & -\frac{(R_{22} + m_4^2 c)}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{22}} \\ -\frac{1}{m} & \frac{m_1}{I_{11}} & \frac{m_2}{I_{12}} & \frac{m_3}{I_{21}} & \frac{m_4}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{c}{m} & -\frac{m_1 c}{I_{11}} & -\frac{m_2 c}{I_{11}} & -\frac{m_3 c}{I_{11}} & -\frac{m_4 c}{I_{11}} & -k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{I_{11}} & \frac{m_2}{I_{12}} & \frac{m_3}{I_{21}} & \frac{m_4}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

### 3. RESULTADOS OBTIDOS

O modelo apresentado, via grafos de ligação, foi implementado computacionalmente utilizando os recursos de um programa comercial de análise matemática.

De posse do modelo implementado, propôs-se um exemplo no qual uma placa era atravessada por um oscilador, cuja trajetória era retilínea, paralela à uma das laterais, passando pelo centro da placa.

Considerando-se que a única força atuante sobre o oscilador é o seu próprio peso, admitiu-se que ele começa a atravessar a placa no instante  $t = 2s$ , tempo este suficiente para que a sua posição de equilíbrio seja atingida.

Para o modelo de placa foram definidas as seguintes propriedades:

- Dimensões:  $a = 1m$ ;  $b = 1m$  e  $h = 0,001m$
- Densidade de área:  $\rho = 7,7 \text{ Kg/m}^2$
- Módulo de elasticidade:  $E = 210 \text{ GPa}$
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,25$
- Fator de amortecimento modal:  $\xi_{mn} = 5\%$  (para todos os modos)

Para o oscilador foram utilizadas as seguintes características:

- Massa:  $m = 1 \text{ Kg}$
- Rigidez da mola:  $k = 1500 \text{ N/m}$
- Coeficiente de amortecimento:  $c = 10 \text{ N.s/m}$

Com as constantes definidas, foram realizadas simulações para se verificar o comportamento do sistema, quando o oscilador apresenta uma velocidade de  $7m/s$ .

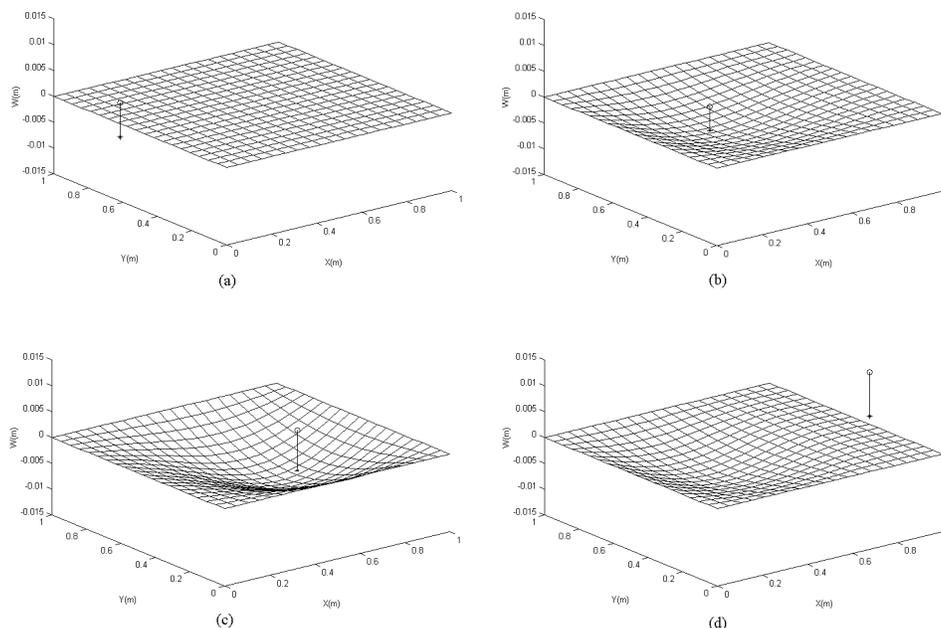


Figura 4 – Configuração do sistema nos instantes: (a)  $t = 1,99 \text{ s}$ ; (b)  $t = 2,05 \text{ s}$ ; (c)  $t = 2,10 \text{ s}$  e (d)  $t = 2,15 \text{ s}$

A Fig. 4 apresenta os resultados obtidos para quatro instantes diferentes da simulação. Na Fig. 4(a), antes de entrarem em contato, o oscilador apresenta a sua configuração de equilíbrio e a placa sua configuração indeformada. Nos instantes posteriores, Fig. 4(b) e Fig. 4(c), quando o oscilador encontra-se nas posições 1/3 e 2/3 da placa, respectivamente, observa-se que seu comprimento sofre uma variação, conforme a estrutura se deforma. Na Fig. 4(d), uma vez que os dois subsistemas não mais interagem, pode-se verificar o amortecimento da estrutura trazendo-a para a posição de equilíbrio.

Para melhor analisar a variação na deformação do oscilador e da placa, interagindo entre si, apresenta-se na Fig. 5 as vistas laterais do sistema para três instantes distintos.

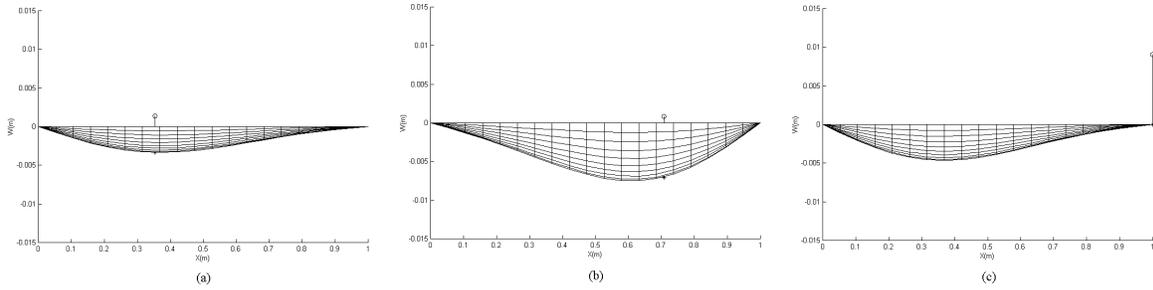


Figura 5 – Vista lateral do sistema nos instantes: (a)  $t = 2,05$  s; (b)  $t = 2,10$  s e (c)  $t = 2,14$  s

Como se pode observar, existe uma relação entre a deformação dos subsistemas. Ao entrarem em contato, o oscilador cede energia para a placa e, enquanto ele a atravessa, uma parte desta energia lhe é devolvida. Esta relação fica mais clara quando se examina, na Fig. 6, o fluxo de potência entre os subsistemas. Este resultado é de grande importância no estudo da interação energética, pois através dele, pode-se saber em que momento, oscilador e placa fornecem ou recebem energia um do outro. É importante ressaltar, que este resultado, é facilmente obtido através da técnica dos grafos de ligação, como mostra a Eq. (14).

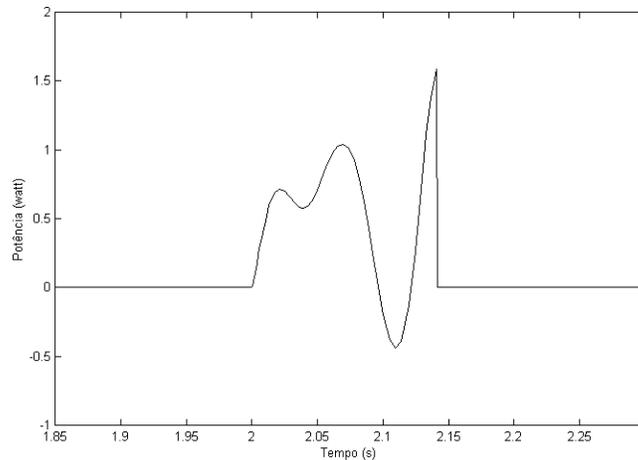


Figura 6 – Fluxo de potência entre os subsistemas

Através da metodologia proposta pode-se obter, também, o comportamento das variáveis no domínio do tempo, como mostra a Fig. 7. Neste exemplo, o deslocamento vertical do oscilador, em cada instante, é apresentado para diferentes velocidades.

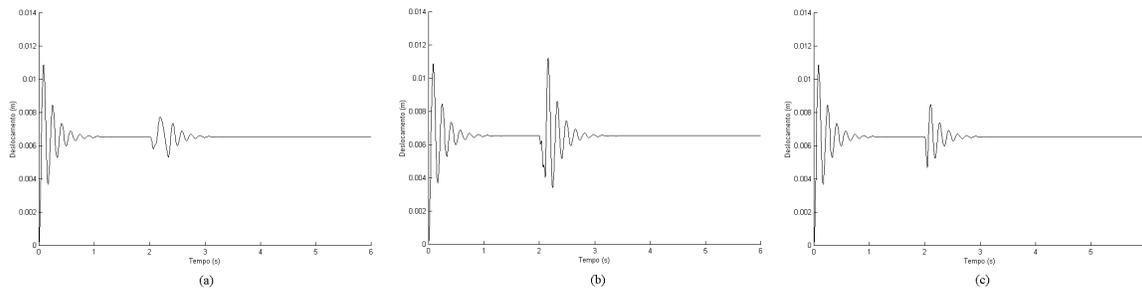


Figura 7 – Deslocamento do oscilador para: (a)  $v = 3\text{m/s}$ ; (b)  $v = 8,88\text{ m/s}$  e (c)  $v = 20\text{m/s}$

Outros resultados podem, ainda, ser facilmente obtidos a partir do modelo de estado apresentado nas Eqs. (12) e (13), uma vez que qualquer informação do modelo físico pode ser escrita a partir das variáveis de estado  $X$  e do vetor de entradas  $U$ .

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo proposto neste trabalho apresentou uma estrutura de placa modelada a partir dos seus primeiros quatro modos de vibrar, entretanto o procedimento definido é geral, o que significa, que um maior número de modos podem ser incluídos no modelo. Este procedimento pode, ainda, ser utilizado para outras estruturas, desde que sejam definidos corretamente suas frequências naturais e seus modos de vibração.

O subsistema mecânico adotado, também foi de caráter genérico, pois qualquer outro subsistema poderia ser proposto e acoplado a estrutura sem maiores dificuldades, preservando sua complexidade original de modelagem.

Estas características de generalidade e modularidade, além da forma automática e elegante com que se obtém o equacionamento matemático e seus consecutivos resultados, são possibilitadas graças a técnica dos grafos de ligação.

O modelo apresentado pode ser melhorado significativamente, se a análise modal for substituída pelo método dos elementos finitos na representação das estrutura. Este método permite a elaboração de modelos estruturais mais complexos, que, aliados à técnica dos grafos, podem continuar sendo utilizados para o estudo da interação com subsistemas mecânicos.

#### REFERÊNCIAS

- Adler, A. A. & Reismann, H., 1974, Moving loads on a elastic plate strip, Transactions of the ASME – Journal of Applied Mechanics, vol.41, pp.713-718.
- Biggs, J. M., 1964, Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill, New York.
- Da Silva, F. R., 1993, Representação das interações dinâmicas entre veículo e estrutura pela técnica dos grafos de ligação, VII SIMEA, Setembro 1-3, São Paulo, pp. 323-332.
- Karnopp, D. C., Margolis, D. L. and Rosenberg, R. C., 1990, Systems Dynamics: A Unified Approach, J. Willey, New York.
- Margolis, D. L., 1987, Finite mode bond-graph representation of vehicle-guideway interaction problems, Journal of The Franklin Institute, vol. 302, n. 1, pp. 1-17.
- Meirovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, 1967, The Macmillan Company, New York.
- Speranza Neto, M., 1995, Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos, CEPUERJ, Rio de Janeiro.

## MOVING LOADS ON PLATES: A FORMULATION USING THE MODAL ANALYSIS

**Abstract.** *This paper introduces a formulation for the study of the interaction between a structure, represented by a plate, and a moving load originated from a dynamical subsystem. The modal analysis has been used to define the transformers, which represents the energetic interaction between the plate and the mechanical subsystem. The facilities of the generalized procedure of the bond graph technique is taken into account. The example of an oscillator travelling all over surface of a plate is introduced to valid the adopted procedure. Some results is shown to emphasize the significance of the model which considers the global behavior of the entire system. The modeling of the structural dynamics using the finite element method, to get a better model is discussed at the end of this paper.*

**Key-words.** *Dynamics, Vibration, Moving Loads, Modal Analysis, Bond-Graphs*